• Δίνεται ακολουθία $x_{\nu+1} = \dfrac{3(1+x_\nu)}{3+x_\nu}$ όπου $x_1 = 1$

i) Να βρείτε το
$\sup\{x_\nu, \nu\in\mathbb{N}\}$

ii) ΝΔΟ $|x_{\nu+2}-x_{\nu+1}| \le k\cdot|x_{\nu+1}-x_\nu|$, $0<k<1$
Έπειτα να βρεθεί το $k\in\mathbb{R}$

iii) ΝΔΟ η ακολουθία $x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ είναι βασική (ή AC)

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) ΘΔΟ η $x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ άνω φραγμένη και συγκλίνουσα.
$x_1<\sqrt{3}$ έστω (με επαγωγή) ότι $x_\nu<\sqrt{3}$ και ΘΔΟ $x_{\nu+1}<\sqrt{3}$

$$x_{\nu+1}^2 - 3 = \frac{9(1+x_\nu)^2}{(3+x_\nu)^2} - 3 = \frac{6(x_\nu^2-3)}{(3+x_\nu)^2} < 0 \Rightarrow x_{\nu+1}<\sqrt{3}$$

$$x_{\nu+1}-x_\nu = \frac{3(1+x_\nu)}{3+x_\nu} - x_\nu = \frac{3-x_\nu^2}{3+x_\nu^2} > 0, \text{ άρα } x_\nu, \nu\in\mathbb{N} \uparrow$$

και άνω φραγμένη από το $\sqrt{3}$. Άρα, θα συγκλίνει και έστω ότι
$\lim x_\nu = l = \lim x_{\nu+1}$ (διότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο ίδιο όριο)

$$x_{\nu+1} = \frac{3(1+x_\nu)}{3+x_\nu} \Rightarrow \lim x_{\nu+1} = \lim\left(\frac{3(1+x_\nu)}{3+x_\nu}\right) \Rightarrow l \quad \sqrt{3}$$

Επομένως, όπως η $x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ ↑ και α.φ. τότε
$\sup\{x_\nu : \nu\in\mathbb{N}\} = \lim x_\nu = \sqrt{3}$.

ii) $$|x_{\nu+2}-x_{\nu+1}| = \left|\frac{3(1+x_\nu)}{3+x_\nu} - \frac{3(1+x_\nu)}{3+x_\nu}\right| = \frac{6\cdot|x_{\nu+1}-x_\nu|}{(3+x_\nu)(3+x_{\nu+1})} \quad (1)$$

Επίσης, $x_\nu\ge 1$ και $x_{\nu+1}\ge 1$ αφού $x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ αύξουσα.
άρα, με τον κατάλληλο μετασχηματισμό έχουμε:
$$\frac{1}{3+x_\nu}\le\frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3+x_{\nu+1}}\le\frac{1}{4}$$

Άρα, η (1) είναι $|x_{\nu+2}-x_{\nu+1}| \le \dfrac{6}{16}\cdot|x_{\nu+1}-x_\nu|$
όπου $k=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}\in(0,1)$.

iii) Αφού ισχύει $|x_{\nu+2}-x_{\nu+1}| \le \frac{3}{8}|x_{\nu+1}-x_\nu|$

$$\left.\begin{array}{ll} \nu=1 & |x_3-x_2| \le \frac{3}{8}|x_2-x_1| \\ \nu=2 & |x_4-x_3| \le \frac{3}{8}|x_3-x_2| \\ \vdots & \vdots \\ \nu=\nu & |x_{\nu+2}-x_{\nu+1}| \le \frac{3}{8}\cdot|x_{\nu+1}-x_\nu| \end{array}\right\} |x_{\nu+2}-x_{\nu+1}| \le \left(\frac{3}{8}\right)^\nu \cdot |x_{\nu+1}-x_\nu|$$

Ισχύει το βασικό λήμμα άρα η $x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ βασική

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΛΗΜΜΑΤΟΣ

Έστω $\lambda=\frac{3}{8}$ και $\mu,\nu\in\mathbb{N}$ με $\mu>\nu$

$|x_\mu-x_\nu| \le |x_\mu-x_{\mu-1}|+|x_{\mu-1}-x_{\mu-2}|+\dots+|x_{\nu+1}-x_\nu| \le$

Θέτουμε $|x_{\nu+1}-x_\nu|=c$.

$$\le \lambda^{\mu-2}\cdot c+\lambda^{\mu-3}c+\dots+\lambda^\nu\cdot c=$$

$$=c\lambda^{\nu-1}(1+\lambda+\dots+\lambda^{\mu-\nu-1})=$$

$$=c\lambda^{\nu-1}\cdot\frac{\lambda^{\mu-\nu}-1}{\lambda-1}=c\lambda^{\nu-1}\cdot\frac{1-\lambda^{\mu-\nu}}{1-\lambda}\le\frac{c\cdot\lambda^{\nu-1}}{1-\lambda}.$$

Ενώ η $\lambda^{\nu-1}\to 0$ όπως μηδενική ακολουθία. $(0<\lambda<1)$

- Έστω $a_{\nu+1}=a_\nu^2$ και $0<a_1<\frac{1}{3}$

i) ΝΔΟ $a_\nu\downarrow$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$

ii) ΝΔΟ $|a_{\nu+2}-a_{\nu+1}|\le\frac{2}{3}|a_{\nu+1}-a_\nu|$

ΛΥΣΗ

i) $a_2=a_1^2<\frac{1}{9}<\frac{1}{3}$ άρα, $a_2\le a_1$

Έστω ότι ισχύει

$a_{\nu+1}\le a_\nu$ και ΘΔΟ $a_{\nu+2}\le a_{\nu+1}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$

$(a_{\nu+1})^2=a_{\nu+2}\Rightarrow a_{\nu+2}=(a_{\nu+1})^2\le(a_\nu)^2=a_{\nu+1}$, $a_\nu\downarrow$ $\nu\in\mathbb{N}$

ii) $|a_{\nu+2}-a_{\nu+1}|=|a_{\nu+1}^2-a_\nu^2|=|a_{\nu+1}-a_\nu|\cdot|a_{\nu+1}+a_\nu|\le$

$$\le|a_{\nu+1}-a_\nu|\cdot|a_1+a_1|=2|a_1|\cdot|a_{\nu+1}-a_\nu|\le\frac{2}{3}\cdot|a_{\nu+1}-a_\nu|$$

$$\boxed{a_1<\frac{1}{3}\Rightarrow 2a_1<\frac{2}{3}}$$